ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 2º Parcial
Fecha examen: 05-JUL-2019 / Fecha notas: 10-JUL-2019

	Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]
Completar:	22	FESTINI SANTIAGO	377/17	9
	Nota (Nº)	Nota (Letras)	Docente	
No completar:	9,05	NUEVE CON 5/100		

1. Para cada uno de los siguientes grafos determinar $\omega(G)$ = cantidad de vértices de un subgrafo completo máximo del grafo. Expresar los resultados en función de n, p y q. Justificar. c/u 0.4 p.
   (a) K_n
   (b) C_n (ciclo simple de $n \geq 3$ vértices)
   (c) P_n (camino simple de n vértices)
   (d) W_n (ciclo simple de $n \geq 3$ vértices con un vértice universal agregado)
   (e) $K_{p,q}$

2. Sean $x, x' \in \mathbb{Z}_{>0}$.
   (a) Demostrar que si G es un grafo de n vértices tal que $\chi(G) \geq x$ y $\chi(G^c) \geq x'$, entonces $n \geq x + x' - 1$. Demostrar que la cota para n no puede ser mejorada exhibiendo un grafo para el cual $n = x + x' - 1$. Justificar. 0.75 p.
   (b) Demostrar que si G es un grafo de n vértices tal que $\chi(G) \leq x$ y $\chi(G^c) \leq x'$, entonces $n \leq x \times x'$. Demostrar que la cota para n no puede ser mejorada exhibiendo un grafo para el cual $n = x \times x'$. Justificar. 0.75 p.
   (c) Exhibir todos los grafos G no isomorfos tales que $\chi(G) \leq 2$ y $\chi(G^c) \leq 2$. Justificar. 0.5 p.

3. Un grafo se dice d-regular si y sólo si todos sus vértices tienen grado d.
   Determinar todos los $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que existe un grafo planar d-regular. Para cada uno de ellos exhibir un grafo planar d-regular que tenga la menor cantidad posible de vértices. Justificar. 2 p.

4. Fausto y Filomena se casaron el 2 de diciembre de 2013. Luego se divorciaron, y hoy se casan nuevamente. A la fiesta de casamiento concurren p familias. Sea a_i el número de miembros de la i-ésima familia ($i = 1, 2, \ldots p$). Por otra parte, se dispone de q mesas donde ubicar a los concurrentes. Sea b_j la cantidad de personas que caben en la j-ésima mesa ($j = 1, 2, \ldots q$). Fausto y Filomena desean que en cada mesa haya a lo sumo dos miembros de cada familia. Diseñar un algoritmo eficiente basado en grafos que ubique a los concurrentes en las mesas de manera tal que se cumpla esa regla. Si no es posible ubicar a los concurrentes, el algoritmo debe informarlo. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar. 2 p.

5. (a) Sea G un grafo. A partir de G se define el digrafo H de la siguiente manera. Por cada vértice v de G el digrafo H tiene los vértices v_{in} y v_{out} con un eje dirigido $(v_{\text{in}}, v_{\text{out}})$. Por cada eje $e = (v, w)$ de G el digrafo H tiene los ejes dirigidos $(v_{\text{out}}, w_{\text{in}})$ y $(w_{\text{out}}, v_{\text{in}})$.
      i. Demostrar que H es bipartito. 0.25 p.
      ii. Demostrar que G es hamiltoniano si y sólo si H lo es. 1 p.
   (b) Demostrar que $\Pi \in$ NP-hard. ¿Qué faltaría demostrar para saber que $\Pi \in$ NP-completo? Justificar. 0.75 p.
      Π: DIGRAFO BIPARTITO HAMILTONIANO
      Entrada: digrafo bipartito H.
      Pregunta: ¿existe un circuito dirigido que pasa exactamente una vez por cada vértice de H?

[1] Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.

FECHA

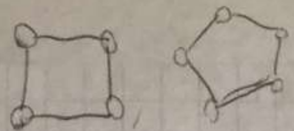
0,4p

1_A_ K_n: COMO K_n REPRESENTA AL GRAFO COMPLETO DE TAMAÑO n VÉRTICES, ENTONCES TRIVIALMENTE K_n ES EL SUBGRAFO COMPLETO DE MAYOR TAMAÑO DE K_n. NO PUEDE HABER UN SUBGRAFO MENOR YA QUE, SEA n LA CANT. DE VÉRTICES DE K_n Y n' LA CANT. DE VÉRTICES DE UN SUBGRAFO DE K_n, POR PROPIEDAD VALE QUE $n \geq n'$ YA QUE $\underbrace{V'}_{\text{VÉRTICES DEL SUBGRAFO } G'} \subseteq \underbrace{V}_{\text{VÉRTICES DEL GRAFO } G}$, Y K_n YA ES UN SUBGRAFO COMPLETO DE TAMAÑO n, EL MÁXIMO POSIBLE. $\Rightarrow$ LA CANTIDAD DE VÉRTICES MÁXIMA DE UN SUBGRAFO COMPLETO DE K_n ES n. ✓

0,4p

B_ C_n:
- EN LOS CICLOS, TODOS LOS VÉRTICES POSEEN GRADO 2. (PROPIEDAD CONDICIÓN)
- EN UN GRAFO COMPLETO $\Rightarrow D(v_i) = |V| - 1$, ES DECIR QUE EL GRADO DE UN VÉRTICE GENÉRICO CUALQUIERA ESTÁ DETERMINADO POR LA CANTIDAD DE VÉRTICES MENOS 1, ESTO SE DEBE A QUE TODO VÉRTICE (n TOTAL) DEBE TENER UNA ARISTA QUE LO RELACIONE CON TODO OTRO VÉRTICE ($n-1$ PORQUE ÉL NO SE RELACIONA CONSIGO MISMO).

DICHO ESTO, COMO EL GRADO MÁXIMO DE UN VÉRTICE EN UN CICLO ES 2 $\Rightarrow$ EL MÁXIMO SUBGRAFO COMPLETO QUE PUEDE FORMARSE ES K_3. ✓ VEAMOS QUE ESTO SOLO PUEDE SUCEDER CUANDO $n=3$ YA QUE $C_3 = K_3$ Y POR LO VISTO EN (A) EL SUBGRAFO COMPLETO DE TAMAÑO MÁXIMO PARA $K_3 = C_3$ ES 3. ✓ $n \geq 3$ POR HIPÓTESIS Y $n=3$ YA CUBIERTO, VEAMOS $n \geq 4$, POR LO VISTO ANTES, EL MÁXIMO SUBGRAFO COMPLETO AL QUE PUEDEN ASPIRAR ES K_3 DEBIDO AL GRADO DE SUS VÉRTICES, PERO ESTO PARA $n \geq 4$ NO ES POSIBLE. PORQUE NO HAY 3 VÉRTICES QUE SE RELACIONEN ENTRE SÍ TODOS CON TODOS.

VIENDO EL DIBUJO  ... V_i SE RELACIONA ÚNICAMENTE CON $V_{(i-1) \bmod n}$ Y $V_{(i+1) \bmod n}$ QUE A SU VEZ SE RELACIONAN CON $V_{(i-2) \bmod n}$ Y $V_{i \bmod n}$, Y $V_{i \bmod n}$ Y $V_{(i+2) \bmod n}$ RESPECTIVAMENTE Y LA ÚNICA FORMA ESTO LLEVA A K_3 ES SI $V_{(i-2) \bmod n} = V_{(i+1) \bmod n}$ Y SI $V_{(i+2) \bmod n} = V_{(i-1) \bmod n}$ LO QUE SOLO ES SATISFACIBLE CON $n=3$ POR LO QUE C_n CON $n \geq 4$ NO PUEDE TENER UN SUBGRAFO COMPLETO DE TAMAÑO ≥ 3, PERO SI PUEDE TENER UN SUBGRAFO COMPLETO DE TAMAÑO 2, BASTA TOMAR 2 VÉRTICES ADYACENTES. ✓

$\Rightarrow$ $n=3$ TAMAÑO MÁXIMO SUBGRAFO COMPLETO $= 3$. ✓
$n \geq 4$ " " $= 2$. ✓

0,4p

C_P_n: EVALUEMOS EL CASO TRIVIAL $n=1 \longrightarrow \circ = K_1$, CLARAMENTE EL TAMAÑO DEL SUBGRAFO COMPLETO MÁXIMO ES 1. (VALE POR (A)) ✓

AHORA $n \geq 2$, UN CAMINO ES UN GRAFO CONEXO SIN CICLOS NI VÉRTICES DE GRADO ≥ 3, A PARTIR DE K_3 LOS GRAFOS COMPLETOS TIENEN CICLOS POR LO QUE RESULTA IMPOSIBLE FORMAR UN SUBGRAFO COMPLETO K_X CON $X \geq 3$ A PARTIR DE UN CAMINO. ✓

$\rightarrow$ ESTO SE PUEDE VER PORQUE SI NO TUVIERAN CICLOS SU CANTIDAD DE ARISTAS SERÍA $n-1$ (ESTO VALE PORQUE K_n ES CONEXO) SIN EMBARGO $m(K_n) = \frac{(n-1).(n)}{2} > n-1$ PARA $n \geq 3$ ✓

ENTONCES EL SUBGRAFO COMPLETO DE MAYOR TAMAÑO PARA P_n CON $n \geq 2$ ES K_2, OBTENIBLE TOMANDO DOS VÉRTICES ADYACENTES CUALESQUIERA, LO CUAL SE PUEDE HACER PORQUE P_n ES CONEXO Y $n \geq 2$. ✓

$\Rightarrow$ $n=1$ TAMAÑO MÁXIMO SUBGRAFO COMPLETO $= 1$ ✓
$n \geq 2$ TAMAÑO MÁXIMO SUBGRAFO COMPLETO $= 2$. ✓

③ N°22 FESTINI SANTIAGO 331/17

0,4p

D_ W_n: ES C_n CON UN VÉRTICE UNIVERSAL EXTRA, ESTE VÉRTICE AGREGA ARISTAS ENTRE ÉL Y TODO VÉRTICE EXISTENTE EN C_n PERO NO AGREGA ENLACES ENTRE 2 VÉRTICES DE C_n POR LO QUE EL SUBGRAFO COMPLETO MÁXIMO OBTENIBLE ES AQUEL DE $C_n + 1$ POR EL VÉRTICE UNIVERSAL EXTRA, QUE COMO DIJIMOS, SE RELACIONA CON TODO OTRO VÉRTICE POR LO QUE PUEDO AGREGARLO AL SUBGRAFO COMPLETO DE C_n SIN PROBLEMAS

Y POR ENDE, TODO OTRO VÉRTICE SE RELACIONA CON ÉL

$\Rightarrow$ $n = 3$ SUBGRAFO COMPLETO DE MAYOR TAMAÑO $= W(C_3)+1 = 3+1 = 4$

$n \geq 4$ " " $= W(C_{\geq 4})+1 = 2+1 = 3.$

0,4p.

E_ $K_{P,Q}$: ES EL GRAFO BIPARTITO COMPLETO DADO POR LAS PARTICIONES DE VÉRTICES VP Y VQ AMBAS CONJUNTOS DE VÉRTICES AISLADOS DE TAMAÑO P Y Q RESPECTIVAMENTE Y / $\forall v \in VP$ Y $\forall w \in VQ$ $\exists e$: ARISTA $e \in E(K_{P,Q}) \wedge e = (v, w)$. AHORA, COMO NINGÚN VÉRTICE ES ADYACENTE A OTRO DE SU MISMA PARTICIÓN ES IMPOSIBLE FORMAR UN SUBGRAFO COMPLETO DE TAMAÑO MAYOR A 2, YA QUE SOLO HAY 2 PARTICIONES Y DENTRO DE UN SUBGRAFO COMPLETO TODOS DEBEN RELACIONARSE CON TODOS. SUPONGAMOS QUE TENEMOS UN SUBCONJUNTO DE 3 VÉRTICES $\{v_1, v_2, v_3\}$ / $v_1 \in V(K_{P,Q}) \wedge v_2 \in V(K_{P,Q}) \wedge v_3 \in V(K_{P,Q})$. ENTONCES TRIVIALMENTE, AL MENOS DOS VÉRTICES PERTENECEN A LA MISMA PARTICIÓN POR LO QUE NO SERÍAN ADYACENTES ENTRE SÍ Y NO PODRÍAN FORMAR PARTE DE UN SUBGRAFO COMPLETO. VEMOS ENTONCES QUE EL TAMAÑO MÁXIMO DE UN SUBGRAFO COMPLETO DE $K_{P,Q}$ ES 2. NOTAR QUE ESTO SOLO PUEDE OCURRIR CUANDO $P \neq 0$ Y $Q \neq 0$ YA QUE SI ALGUNA PARTICIÓN TIENE TAMAÑO 0 $\Rightarrow E(K_{P,Q}) = \emptyset$ Y EL ~~..~~ TAMAÑO

DEL MAYOR SUBGRAFO COMPLETO SERÍA ENTONCES 1.

PARA CONSTRUIR K_2 CON $P \wedge Q \geq 1$ BASTA TOMAR DOS VÉRTICES, 1 DE CADA PARTICIÓN.

i) $\underbrace{P = 0 \vee Q = 0}$ TAMAÑO SUBGRAFO COMPLETO MAYOR $= 1$

AMBOS NO PUEDEN SER 0 PUES NO SERÍA UN GRAFO VÁLIDO

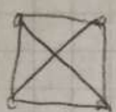
$P \geq 1 \wedge Q \geq 1$ " " $= 2$

④ N° 22 S.T FESTINI SANTIAGO 311/17
1,70.

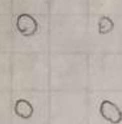
2A_ $\chi(G) \geq x$ y $\chi(G^c) \geq x' \Rightarrow n \geq x + x' - 1$

sin esto no está bien $\Leftrightarrow n+1 \geq x + x'$

SEA $G = K_4$
$\Rightarrow G^c$ = 4 VÉRT. AISLADOS

$G =$  , $\chi(G) = 4$ POR SER COMPLETO.

$n = 4$

$G^c =$  , $\chi(G^c) = 1$

$\boxed{\text{POR EL EJERCICIO 10.12.a}}$ SABEMOS QUE

$$n+1 \geq \underbrace{\chi(G)}_{\geq x} + \underbrace{\chi(G^c)}_{\geq x'}$$

$\Rightarrow n+1 \geq x + x'$ LO QUE QUERÍAMOS VER.

$\Rightarrow \chi(G) + \chi(G^c) = n+1 \Rightarrow 4+1 = 4+1$ # VÉRTICES DE $n+1$

No sé si entendiste bien lo de mejorar la cota

VEAMOS QUE NO PODEMOS REDUCIR LA COTA PARA LA SUMA DE COLOREOS DE UN GRAFO Y SU COMPLEMENTO YA QUE LOGRAMOS IGUALARLA CON EL EJEMPLO MOSTRADO ARRIBA.

$n = 4 \Rightarrow n+1 = 4+1 = 5 = 4+1 = x + x'$ con $x = 4$
$x' = 1$.

B_ $\chi(G) \leq x$ y $\chi(G^c) \leq x' \Rightarrow n \leq x . x'$

POR EL EJERCICIO $\boxed{10.12.B}$ SABEMOS QUE

$$n \leq \chi(G) . \chi(G^c) \leq \underbrace{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$ ¡IGNORAMOS ESTO

$$\Rightarrow n \leq \underbrace{\underbrace{\chi(G)}_{\leq x} . \underbrace{\chi(G^c)}_{\leq x'}}_{\text{Y ADEMÁS AMBOS POSITIVOS YA QUE } \chi(H) \geq 1 \text{ POR DEFINICIÓN}}$$

$\Rightarrow n \leq \chi(G) . \chi(G^c) \leq x . x' \Rightarrow \boxed{n \leq x . x'}$

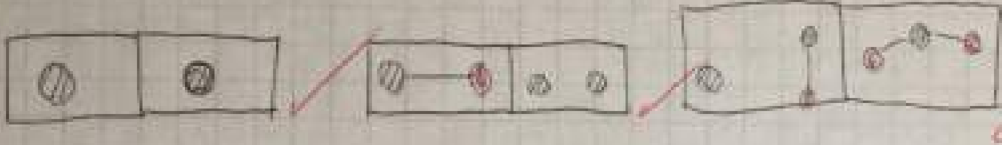
PODEMOS USAR EL MISMO EJEMPLO QUE PARA (A) Y VEMOS QUE

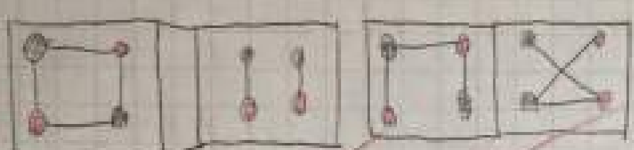
$G = K_4$  , $\chi(G) = 4$

$n = 4 \Rightarrow n = \chi(G) . \chi(G^c)$

$G^c =$  , $\chi(G^c) = 1$ $\quad 4 = 4 . 1$

$n = 4 = 4.1 = x . x'$ con $x = 4$
$x' = 1$

C_ 



Asumo que estos son Gs y sus G^c.

POR $\boxed{\text{EJ. 10.12.B}}$ SABEMOS QUE PARA $\chi(G)=2$ Y $\chi(G^c)=2$

CON $n = 4$ $4 \leq 4 \leq 4$

Medio raro escrito

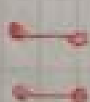
$\Rightarrow$ LA MÁXIMA CANT. DE VÉRTICES ERA 4.

$n \leq \chi(G) \chi(G^c) \leq 2 \cdot 2 = 4$.

PARTIENDO DE AHÍ EXPUSE TODOS LOS GRAFOS NO ISOMORFOS QUE CUMPLÍAN LO PEDIDO Y CON UN COLOREO VÁLIDO.

X NO, faltan:  $2 K_1$

 P_3

 $2.K_2$.

3_ Sea G un grafo planar D-regular

⇒ todos sus vértices tienen grado D.

⇒ $\underbrace{2m = D.n}$ ⇒ $m = D/2 . n$

$2m = \sum_{v_i \in G} d(v_i)$

• $m \leq 3n - 6$ → Estamos asumiendo planaridad y por Ej. $\boxed{9.3.B}$ no hace falta conexidad.

Pero sí hace falta $n \geq 3$

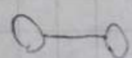
⇒ $D/2 . n \leq 3n - 6$] A partir de D=6 esto no vale ya que

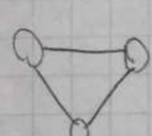
$\cancel{3n} + \underbrace{\frac{D-6}{2}}_{\text{siempre positivo ya que } D \geq 6} . n \leq \cancel{3n} \underbrace{-6}_{\text{negativo}}$

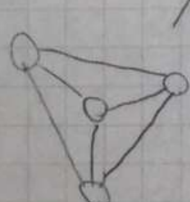
Es una contradicción! (Sale por $\boxed{\text{Ej. } 9.5.A}$ también)

Veamos ejemplos para D = 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

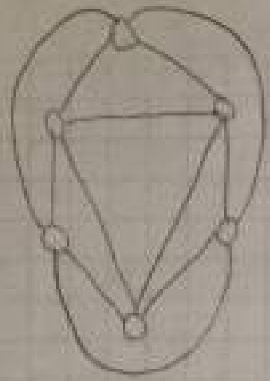
D=0  La mínima cant. de vért. en un grafo válido es 1.

D=1  Todo vértice tiene grado 1 y usamos 1 arista. Trivialmente vemos que no podríamos hacerlo con menor cant. de vértices ya que no consideramos relaciones reflexivas.

D=2  $D+1 \leq n$ porque un vértice no puede tener grado D sin al menos otros D vértices para relacionarse con.

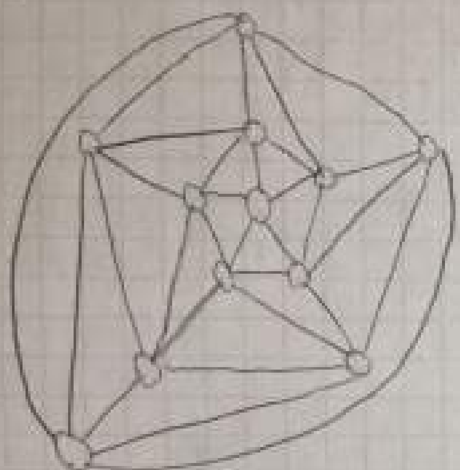
D=3 

D=4



NOTEMOS QUE NO PODEMOS SEGUIR CON LA TRADICIÓN DE USAR K_{D+1} PORQUE ESO SERÍA K_5 QUE SABEMOS ES NO PLANAR.

D=5

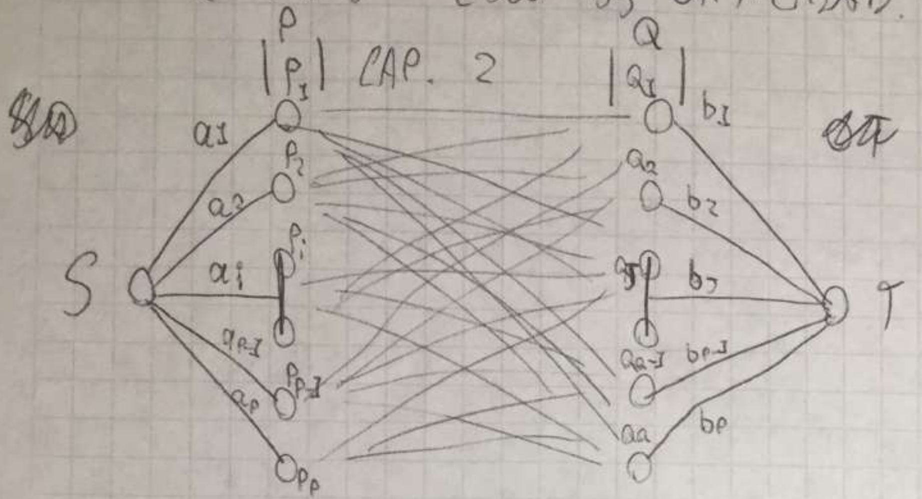


POR EL $\boxed{\text{EJERCICIO 9.5.B}}$ SABEMOS QUE SI UN GRAFO PLANAR TIENE 11 O MENOS VÉRTICES ⇒ POSEE AL MENOS UN VÉRTICE DE GRADO 4 Y COMO NECESITAMOS QUE TODOS NUESTROS VÉRTICES TENGAN GRADO 5

⇒ LA CANTIDAD MÍNIMA DE VÉRTICES USADOS ES 12 Y LO HICIMOS CON 12.

6 N° 22 FESTINI SANTIAGO 331/17 1,5

4_ • P FAMILIAS CON a_i MIEMBROS CADA FAMILIA.
• Q MESAS CON B_J CAPACIDAD.



PODEMOS MODELAR EL PROBLEMA PROPUESTO USANDO FLUJO. PARA ELLO ARMAMOS UNA RED DE LA MANERA MOSTRADA ARRIBA, EN DONDE LAS FAMILIAS PUEDEN ENVIAR INTEGRANTES A MESAS CON CAPACIDAD 2, NOTAR QUE ESTA ES LA ÚNICA RESTRICCIÓN YA QUE LUEGO CADA FAMILIA PUEDE IR A CUALQUIER MESA. POR OTRO LADO LAS ARISTAS QUE PARTEN DE LA FUENTE A LAS FAMILIAS POSEEN CAPACIDAD a_i SEGÚN LA CANTIDAD DE INTEGRANTES DE LA FAMILIA P_i Y ADEMÁS, LAS ARISTAS QUE PARTEN DE LAS MESAS AL SUMIDERO TIENEN SU CAPACIDAD LIMITADA POR SU TAMAÑO. (b_J)

DE ESTA MANERA NOS EVITAMOS QUE LAS FAMILIAS POSEAN MÁS INTEGRANTES DE LOS QUE TIENEN, QUE SOLO PUEDAN ENVIAR DOS FAMILIARES A LA MISMA MESA Y QUE LAS MESAS NO ACEPTEN MAS PERSONAS QUE SU TAMAÑO MÁXIMO, SATISFACIENDO LAS RESTRICCIONES REQUERIDAS.

NOTEMOS QUE EL GRAFO ES CONEXO PORQUE LA FUENTE SE CONECTA CON TODAS LAS FAMILIAS, TODA FAMILIA SE CONECTA CON TODA MESA Y ADEMÁS TODA MESA SE CONECTA CON EL SUMIDERO.

POR OTRO LADO COMO TODAS LAS CAPACIDADES SON ENTERAS Y EXISTE UN FLUJO MÁXIMO, APLICA EL TEOREMA DEL FLUJO ENTERO. DE VALOR ENTERO

EL MODELADO DEL PROBLEMA SERÍA EL SIGUIENTE:

- DADOS DOS VECTORES a DE TAMAÑO P Y β DE TAMAÑO Q:
  - CREAMOS GRAFO VACÍO, $G(\emptyset, \emptyset)$ $O(1)$
  - AGREGAMOS VÉRTICES S Y T $O(1)$
  - PARA i DE $1 \to P$ $O(P)$
    - AGREGAMOS VÉRTICE a_i $O(1)$
    - AGREGAMOS ARISTA $S \to a_i$ CON CAPACIDAD $a[i]$ $O(1)$
  - PARA J DE $1 \to Q$ $O(Q)$
    - AGREGAMOS VÉRTICE β_J $O(1)$
    - AGREGAMOS ARISTA ~~β_J~~ $\beta_J \to T$ CON CAPACIDAD $\beta[J]$ $O(1)$
- PARA i DE $1 \to P$ $O(\cancel{\emptyset} P \cdot Q)$
  - PARA J DE $1 \to Q$
    - AGREGAR ARISTA DE $a_i \to \beta_J$ CON CAPACIDAD 2 $O(1)$

DICHO ESTO, EL ALGORITMO DE MODELADO NOS QUEDA POLINOMIAL EN BASE A LA ENTRADA.

7 N° 22 FESTINI SANTIAGO 353/17

SEA $\mathcal{F}$ LA FUNCIÓN MODELADORA.

SEA H EL ALGORITMO PEDIDO

H (VECTOR α TAM P, VECTOR β TAM Q)

GRAFO $G = \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ $O(P.Q)$ // LLAMO A FUNCIÓN // MODELADORA

i = FORDFULKERSON (G) $O(M.F)$

SI i = SUMATORIA DE INTEGRANTES $\to O(P)$

=) SE PUEDE

SINO

=) NO SE PUEDE

PODEMOS APLICARLO PORQUE ES CONEXO Y TEO. FLUJO ENTERO.

CLARAMENTE POLINOMIAL POR LO EXPLICADO.

$\underbrace{\# \text{ARISTAS} = P + P.Q + Q}_{\text{POLINOMIAL}}$

VALOR FLUJO MÁXIMO ACOTADO POR

$\min(\Sigma a_i, \Sigma \beta_i) \; 2.P.Q)$

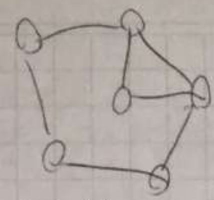
ASEGURA POLINOMIALIDAD.

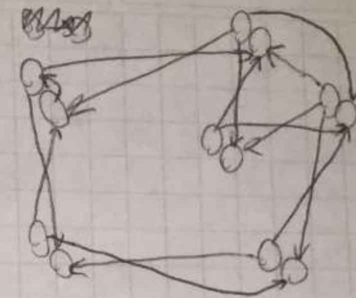
Usa variante que dep. del valor del flujo. El cálculo está bien.

Falta una biyección entre flujo y asignación y falta reconstruir la asignación desde ~~el~~ la red de flujo

(8) N° 22 FESSINT SANTIAGO 33I/17

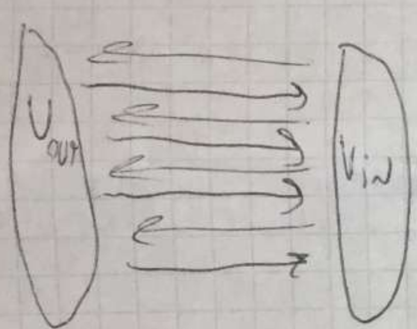
1,85

S_ G →


H →


A_ ES FÁCIL VER QUE H
ES BIPARTITO YA QUE SOLO POSEE
ARISTAS DE LA FORMA $V_{out} \to W_{in}$ Y $V_{in} \to V_{out}$
POR LO QUE SI PARTICIONAMOS EL GRAFO
EN DOS CJTOS. DE VÉRTICES V_{in} Y V_{out}, TODO $V \in V_{in}$ NO
ES ADY. CON TODO $W \in V_{in}$ Y ANÁLOGO PARA V_{out}.

LO QUE DEJA UN GRAFO DE LA FORMA:



B_ G HAM ⟺ H HAM.

$\underbrace{\text{G HAM}}_{\Downarrow}$ ⟹ H HAM

∃ UN CIRCUITO DE VÉRTICES DE G / NO
REPITE VÉRTICES Y PASA POR TODOS ELLOS

⟹ EL CIRCUITO HAMILTONIANO ENTRA UNA VEZ A CADA VÉRTICE Y
SALE UNA VEZ DE CADA VÉRTICE YA QUE SI HICIERA ALGUNA MÁS DE
UNA VEZ O ESTARÍA REPITIENDO VÉRTICES, O ~~[illegible]~~ SE ESTARÍA
DIVIDIENDO EN DOS CAMINOS (IMPOSIBLE), Y ADEMÁS NO PUEDE NO
ENTRAR A UN VÉRTICE PORQUE NO SERÍA HAMILTONIANO Y NO
PUEDE NO SALIR O NO SERÍA CIRCUITO ⟹ GRADO DE ENTRADA
Y DE SALIDA = 1.
⟹ ES FÁCIL HACER LA TRANSFORMACIÓN A H Y VER QUE
SIGUE VALIENDO. ⟹ H HAM.

H HAM => G HAM

COMO H ES HAMILTONIANO PARA TODO V_i (DOBLE) $\in$ H $out(V_{in(i)}) = 1$ Y ESTA DIRIGIDO AL $in(V_{out(i)}) = 1$, PUEDO CONTRAER ESTAS ARISTAS ENTONCES Y SEGUIR TENIENDO UN CIRCUITO HAMILTONIANO VÁLIDO, Y ADEMÁS, AHORA H ES IGUAL A G.

=> G ES HAMILTONIANO.

b_ ~~[illegible]~~ EMPEZEMOS POR LO FÁCIL Y RÁPIDO,

SUPONIENDO QUE $\Pi \in$ NP-HARD, LO QUE FALTARÍA PARA VER QUE ES NP-COMPLETO ES VER QUE ES NP, ESTO QUIERE DECIR. PROBAR QUE TIENE UN ALGORITMO VERIFICADOR POLINOMIAL QUE DADA UNA INSTANCIA QUE EN Π LA RESPUESTA SERÍA "SÍ" Y UN CERTIFICADO ADECUADO, EL VERIFICADOR RESPONDE "SÍ" EN TIEMPO POLINOMIAL.

VEAMOS AHORA QUE ES NP-HARD.

TOMO Π' = CIRCUITO HAMILTONIANO QUE SABEMOS POR LA PRÁCTICA QUE ES NP-COMPLETO.

QVQ $\Pi' \leq_p \Pi$

$\exists f$ ENTONCES FUNCIÓN QUE TRANSFORMA INSTANCIAS DE Π' EN INSTANCIAS DE Π

9 N°22 FESTINI SANTIAGO 31I(17

SEA ESTA f LA FUNCIÓN ~~[illegible]~~ DESCRIPTA EN EL ENUNCIADO 5.A / DADO UN GRAFO G, DUPLICA SUS VÉRTICES EN Vin Y Vout

(SIGUE COMO EL ENUNCIADO, NO TENGO TIEMPO).

ESTA f ES POLINOMIAL Y EFECTIVAMENTE TRANSFORMA INSTANCIAS DE Π' EN INSTANCIAS DE Π

FALTA JUST.

DUPLICA VÉRTICES $O(n)$
Y AGREGA 3x # DE ARISTAS $O(m)$ $\left(O(n+m)\right)$

Y POR LO VISTO EN 5.A

$\forall$ inst I DE Π' $RESP_{\Pi'}(I) = \text{"SÍ"} \iff RESP_{\Pi}(f(I)) = \text{"SÍ"}$

$\Rightarrow \Pi \in$ NP-HARD.